

## Drehungen des Raumes und Koordinatentransformationen

ERWIN J. KRUCK, Aalen

**Keywords:** IMU-calibration, Bore sight alignment, Definition of rotational angles, Rotated axis, Rotation of space, Coordinate transformations, Rotational sequence,

**Abstract:** Dealing with orientation or geometrical restitution of pictures in photogrammetry also means dealing with rotations and transformations. Therefore the assumption that all the respective questions should have been solved properly already seems to be logic. But in practice considerable problems arise when discrete values have to be transformed for real applications, especially when measured angles, e. g. of an inertial navigation system or of a photo theodolite have to be included in the calculations. Even photogrammetric textbooks and publications cannot grant support in every single case, as not all of them show the basic mathematical relations correctly.

For this reason the aim of this article is to promote the comprehension for rotations of space, coordinate transformations and measured angle values. It describes the basic relations and gives advices for practical applications and parameterisation of rotations. The indicated formulas grant a successful application especially for e. g. inertial navigation systems like AEROcontrol as well as for terrestrially measured orientation angles.

**Zusammenfassung:** Drehungen und Transformationen begegnen uns in der Photogrammetrie ständig, wenn es um die Orientierung oder geometrische Auswertung von Bildern geht. Man sollte also meinen, dass damit verbundene Fragestellungen vollständig beherrscht werden. In der Praxis zeigt sich jedoch immer wieder, dass erhebliche Probleme auftreten, sobald diskrete Werte für reale Anwendungen umzusetzen sind. Dies gilt insbesondere, wenn gemessene Winkel z.B. eines Inertialsystems oder eines Phototheodoliten in Berechnungen einbezogen werden sollen. Auch photogrammetrische Lehrbücher und Veröffentlichungen sind hier nicht immer eine Hilfe, da nicht alle die grundlegenden mathematischen Beziehungen korrekt darstellen.

Dieser Artikel soll das Verständnis für räumliche Drehungen, Koordinatentransformationen und gemessene Winkelwerte fördern. Er beschreibt daher die grundsätzlichen Beziehungen und gibt Empfehlungen zur praktischen Anwendung und zur Parametrisierung der Drehungen. Die angegebenen Formeln garantieren einen erfolgreichen Einsatz insbesondere z.B. für Inertialsysteme wie AEROcontrol sowie auch für terrestrisch gemessene Orientierungswinkel.

### Einleitung

Als Geodäsie-Student habe ich es nie geschafft wirklich tiefes Verständnis für die Fragen von mitgedrehten Achsen und raumfesten Achsen in der Photogrammetrie zu entwickeln. Als frischgebackener Assistent am Institut für Photogrammetrie und Ingenieurvermessungen der Universität Hannover wurde ich der Abteilung für Ingenieurvermessungen und Nahbereichsphotogrammetrie zugeordnet. Im Rahmen der vorbereitenden Arbeiten zur Altstadtanierung in Hameln war es 1978 eine meiner ersten Aufgaben, gemessene Orientierungswinkel von photogrammetrischen Aufnahmen in eine Bündelausgleichung mit einzubeziehen, um so Passpunkte an den wunderschönen historischen Gebäuden einzusparen. Die Bilder wurden damals weitestgehend mit einer SMK 120 aufgenommen, sodass auch eine Berücksichtigung der festen Beziehungen zwischen jeweils einem Aufnahme-paar sinnvoll erschien.

Die notwendigen mathematischen Beziehungen einschließlich der Taylor-Linearisierungen waren umfassend in einer Dissertation dargestellt. Da ich zu diesem Zeitpunkt bereits auf neun Jahre Erfahrungen in der Softwareentwicklung zurückblicken konnte, war ein entsprechendes Programm schnell entwickelt. Zu meinem Leidwesen zeigten sich in den Ergebnissen aber immer wieder unerklärliche Spannungen. Mir kamen daher Zweifel an der Richtigkeit der verwendeten Formeln [2]. Ein Studium der photogrammetrischen Lehrbücher führte auch nicht weiter, da es deutliche Widersprüche gab.

Durch Kontakte mit einem der mathematischen Institute an der Universität wurde ich auf das Buch "Matrizen" von R. Zurmühl [3] aufmerksam. Der §5 dieses Buches schaffte Klarheit. Zusammen mit dem "Handbuch der Vermessungskunde" Band III a/1 [1] konnte ich dann die mathematischen Zusammenhänge richtig formulieren und in erfolgreiche Software umsetzen.

Im Laufe der Jahre bin ich dann gelegentlich immer wieder mit Kollegen zusammengetroffen, die dieselben Probleme mit dem Verständnis der mathematischen Zusammenhänge hatten. Zum Teil ist dies sicher auch durch eine ungeschickte Wahl der Begriffe "mitgedrehte Achsen" und "raumfeste Achsen" zurückzuführen. Das Wissen um eine korrekte Formulierung scheint im Laufe der Jahre etwas verschüttet worden zu sein – bei [1] findet man eine richtige Darstellung, die Gründe sind jedoch (für mich) nur im Zusammenhang mit [3] richtig zu verstehen.

Schreibt man eine Software für Bündelausgleichung, die als einzige Winkel die des photogrammetrischen Luftbildes enthalten, so ist es völlig egal, wie man die Formulierung der Winkel vornimmt. Ob mitgedreht oder raumfeste Achsen, ob Drehreihenfolge  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  oder  $\kappa$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  – es spielt gar keine Rolle. Die Neigungswinkel  $\varphi$  und  $\omega$  sind bei normalen Luftbildern klein und eine Kontrolle der Werte ist ohnehin nicht möglich. Die Drehmatrix  $\mathbf{R}$  in der üblichen Kollinearitätsgleichung (1) ist außerdem von ihrer Parametrisierung unabhängig. D.h.: für ein konkretes Messbild existiert zu einem Bildvektor  $|\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$ ,  $\mathbf{c}|$  genau eine einzige Drehmatrix  $\mathbf{R}$ , die die Gleichung

erfüllt. Sie kann durch einen Satz von drei Drehwinkeln oder Rodrigues-Parametern eindeutig beschrieben werden.

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}_0 = \lambda \mathbf{R} \mathbf{x}' \quad (1)$$

Will man jedoch einen Zusammenhang herstellen zwischen den Winkeln der Drehmatrix  $\mathbf{R}$  und gemessenen Orientierungen so kann ohne eine exakte Abfolge der Drehungen bzw. Drehmatrizen kein richtiges Ergebnis erzielt werden. Dies ist der Fall bei der Anwendung von inertialen Winkelmeßsystemen wie AEROcontrol von IGI. Auch bei der Aufeinanderfolge von Drehungen, wie sie in analytischen und digitalen photogrammetrischen Systemen üblich sind, ist eine genaue Reihenfolge zu beachten (z.B. Drehung vom Modell ins Geländesystem sowie vom Modell in die beiden Bilder).

Aus Anlass der 25-Jahr-Feier der Firma IGI und der Bedeutung dieser Zusammenhänge für das IGI-System habe ich mich zu einer grundlegenden Darstellung zu diesem Thema entschlossen.

## 2 Drehung des Raumes und Koordinatentransformationen

Grundsätzlich sind zwei verschiedene Auffassungen zu unterscheiden: Die Drehung der Raumes und die Transformation von Koordinaten [3].

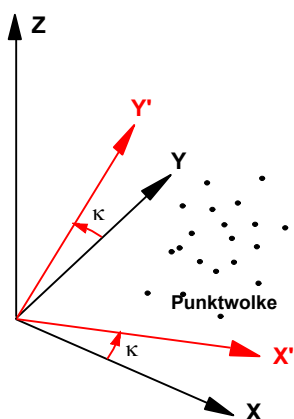


Abb. 1: Drehung des Raumes um  $\kappa$

Bei der Drehung des Raumes betrachten wir eine Punktwolke in einem gegebenen Koordinatensystem. Ohne die Lage dieser Punktwolke zu verändern, drehen (und ggf. verschieben) wir das Achsenkreuz des Koordinatensystems und bringen es somit in eine neue Position relativ zu der Punktwolke (Abb. 1). Dies entspricht der Drehung um mitgedrehte Achsen. Nach meiner Auffassung ist jedoch der Begriff von der Drehung des Raumes sehr viel zutreffender und anschaulicher. Nach [3] steht die Drehmatrix dabei am **neuen** Vektor.

$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{a}^R \quad (2)$$

(2) stellt also mit  $\mathbf{a}^R$  den Vektor  $\mathbf{a}$  nach Drehung des Raumes (um mitgedrehte Achsen) um  $\mathbf{R}$  dar.

Bei der Transformation von Koordinaten betrachten wir nur ein einziges Koordinatensystem, dessen Achsen im Raum festliegen (raumfeste Achsen). Die Punktwolke

wird innerhalb dieses Raumes bewegt und in Orientierung und Position verändert (Abb. 2). Die mathematische Darstellung ist:

$$\mathbf{a}^R = \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (3)$$

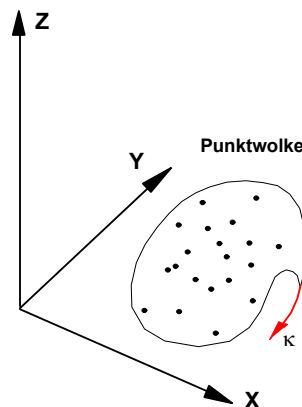


Abb. 2: Transformation einer Punktwolke

In (3) ist  $\mathbf{a}^R$  der mit  $\mathbf{R}$  transformierte Vektor  $\mathbf{a}$ . Beide Vorstellungen verhalten sich also genau invers zueinander.

Werden nun mehrere Drehungen nacheinander ausgeführt, so ist (2) mehrfach anzuwenden. Es sei  $\mathbf{x}$  ein Vektor im ursprünglichen Grund-System (Ground, G). Der Raum wird um  $\kappa$  gedreht (4). Diese Drehung vom Grundsystem um  $\kappa$  ergibt mit  $\mathbf{x}^{\kappa}$  den im gedrehten Raum  $\mathbf{x}$ . Die nächste Drehung von  $\mathbf{x}^{\kappa}$  erfolgt um  $\varphi$  (5). Die Matrix  $\mathbf{R}_{\kappa}^{\varphi}$  dreht den bereits um  $\kappa$  gedrehten Raum weiter in einen zusätzlich um  $\varphi$  gedrehten Raum. Der Vektor  $\mathbf{x}^{\kappa}$  wird nun zu  $\mathbf{x}^{\kappa\varphi}$ . Die nächste Drehung erfolgt mit  $\mathbf{R}_{\kappa\varphi}^{\omega}$  um  $\omega$  aus dem bereits um  $\kappa$  und  $\varphi$  gedrehten Raum heraus. Der Vektor  $\mathbf{x}^{\kappa\varphi\omega}$  ist also in einem um alle drei Winkel gedrehten Raum dargestellt (6).

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_G^{\kappa} \mathbf{x}^{\kappa} \quad (4)$$

$$\mathbf{x}^{\kappa} = \mathbf{R}_{\kappa}^{\varphi} \mathbf{x}^{\kappa\varphi} \quad (5)$$

$$\mathbf{x}^{\kappa\varphi} = \mathbf{R}_{\kappa\varphi}^{\omega} \mathbf{x}^{\kappa\varphi\omega} \quad (6)$$

Setzen wir nun (6) in (5) und das Ergebnis daraus wieder in (4) ein, so folgt (7):

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_G^{\kappa} \mathbf{R}_{\kappa}^{\varphi} \mathbf{R}_{\kappa\varphi}^{\omega} \mathbf{x}^{\kappa\varphi\omega} \quad (7)$$

kurz  $\mathbf{x} = \mathbf{R}_{\kappa} \mathbf{R}_{\varphi} \mathbf{R}_{\omega} \mathbf{x}'$

Vektor  $\mathbf{x}'$  in Gleichung (7) stellt somit den Vektor  $\mathbf{x}$  in einem um  $\kappa$ ,  $\varphi$  und  $\omega$  gedrehten Raum dar.

Es ist deutlich, dass aufeinanderfolgende Drehungen des Raumes grundsätzlich durch Multiplikation der Drehmatrizen bewirkt werden, keinesfalls durch Addition der Winkel. (7) kann auch als fortgesetzte Transformation von  $\mathbf{x}'$  nach  $\mathbf{x}$  aufgefasst werden, dann aber mit der Reihenfolge  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ .

### 3 Parametrisierung, Singularitäten und Wahl der Drehreihenfolge

Die Gleichung (7) ist immer frei von Singularitäten, da alle  $\mathbf{R}$  orthogonale Matrizen sind, d.h. ihre Inverse ist gleich der Transponierten und existiert daher in jedem Falle. Die *Parametrisierung* von  $\mathbf{R}$  mit Drehwinkeln führt jedoch regelmäßig zu Problemen, wenn der zweite Drehwinkel ein rechter Winkel wird. Die erste Drehachse wird dann genau in die dritte Drehachse hineingedreht, sodass der erste und der dritte Winkel nicht mehr voneinander unabhängig sind. Daraus folgt, dass mit einem einzigen Satz von Drehwinkeln nicht alle Raumrichtungen beschrieben werden können. Abhilfe bietet z.B. eine Parametrisierung nach Rodrigues. Sie ist immer dann zu empfehlen, wenn es nicht erforderlich ist, mit den Parametern eine Anschauung zu verbinden. Alternativ kann man zwei verschiedene Winkeldefinitionen zur Parametrisierung wählen, die den Vorteil einer sehr guten Anschaulichkeit bieten:

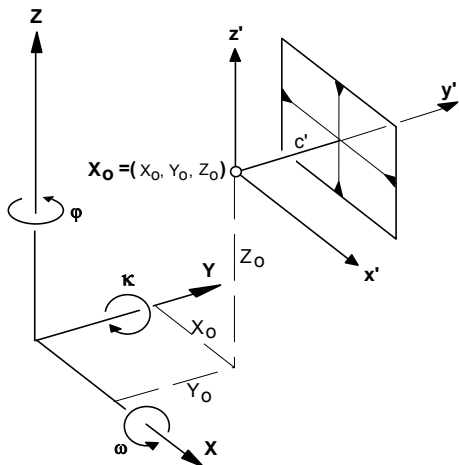


Abb. 3: Terrestrische Drehwinkel

Abb. 3. und Abb. 4. zeigen eine Empfehlung zur Definition von Drehwinkeln für terrestrische Bilder und für Luftbilder. In beiden Definitionen sind für Standardaufnahmefälle die Drehwinkel Null. Entscheidend ist zusätzlich die Wahl der Drehreihenfolge:

Um für terrestrische Drehwinkel eine Verknüpfung zwischen den Orientierungswinkeln eines Bildes und von einem Phototheodoliten gemessenen Aufnahmerichtungen herzustellen sowie für eine gute Anschaulichkeit der Aufnahmerichtungen ist dringend die Drehreihenfolge  $\varphi, \omega, \kappa$  empfohlen. Dann ist  $\varphi$  der Horizontalwinkel,  $\omega$  der Höhenwinkel und  $\kappa$  die Bilddrehung. Die Kollinearitätsgleichung lautet dann für terrestrische Bilder:

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}_0 = \lambda \mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\kappa \mathbf{x}' \quad (8)$$

Für Luftbilder werden in der Praxis die Drehreihenfolgen  $\varphi, \omega, \kappa$  oder  $\omega, \varphi, \kappa$  bevorzugt. Im von mir entwickelten Bündelprogramm BINGO wird  $\varphi, \omega, \kappa$  benutzt. Diese Festlegung würde ich heute anders treffen, nämlich  $\kappa, \varphi, \omega$ , weil dann auch bei schrägen Luftaufnahmen eine gute Anschauung der tatsächlichen Aufnahmerichtung ermöglicht wird.

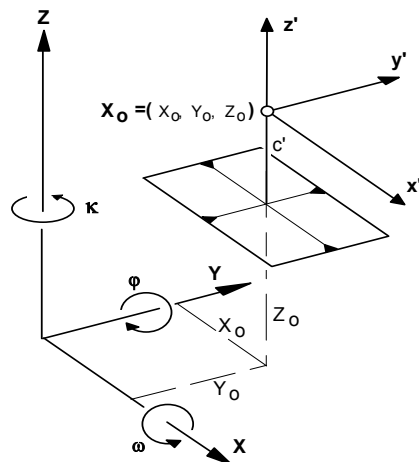


Abb. 4: Luftbildwinkel

Abb. 5 zeigt einen Bildflieger der in Steigflug mit  $\varphi = 33$  gon Aufnahmen macht. Wir unterstellen hier Schrägaufnahmen seitlich aus dem Flieger heraus mit  $\omega = 50$  gon. Bei West-Ost Flugrichtung ist  $\kappa = 0$  gon. In diesem Fall sind auch bei einer Drehreihenfolge  $\varphi, \omega, \kappa$  die Winkel  $\varphi = 33$  und  $\omega = 50$ .

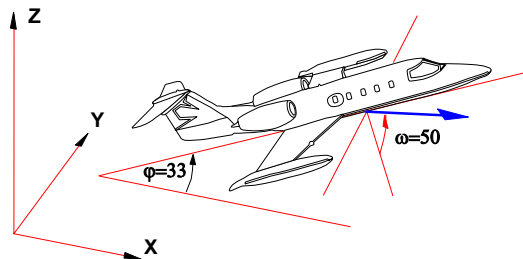


Abb. 5 Flugsituation bei  $\kappa = 0$

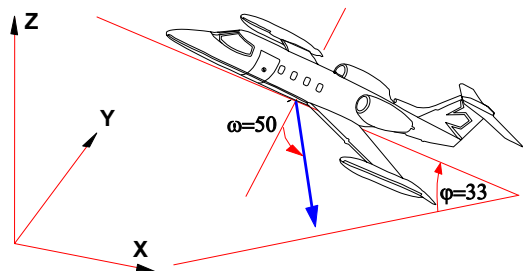


Abb. 6 Flugsituation bei  $\kappa = 250$

Wird nun nur die Flugrichtung auf  $\kappa = 250$  geändert (Abb. 6), so bleiben die Winkel  $\varphi = 33$  und  $\omega = 50$  nur bei einer Drehreihenfolge  $\kappa, \varphi, \omega$  mit ihren Werten erhalten. Bei einer Drehreihenfolge  $\varphi, \omega, \kappa$  sind die Winkel dann  $\varphi = -56$ ,  $\omega = -16$  und  $\kappa = -156$ . Die Anschauung ist also vollständig verloren gegangen. Das liegt daran, dass die  $\kappa$ -Drehung in einem Raum erfolgt, der bereits um  $\varphi$  und  $\omega$  gedreht ist, also selbst schräg im Raum liegt.

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}_0 = \lambda \mathbf{R}_\kappa \mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\omega \mathbf{x}' \quad (9)$$

Für Luftbilder wird daher die Kollinearitätsgleichung (9) empfohlen.

## 4 Inertialsysteme

Auch bei der Kalibrierung von Inertialsystemen wie AEROcontrol sind Koordinatensysteme und Drehreihenfolgen sorgfältig auszuwählen. Besondere Beachtung kommt der Reihenfolge der Drehmatrizen zu. Eine nicht strenge Formulierung der Beziehungen führt schnell zu falschen Ergebnissen. Häufig wird in der Praxis beobachtet, dass sogar die aus einer Aerotriangulation ermittelten Drehwinkel direkt durch Subtraktion mit den Messwerten der IMU (inertial measurement unit) verglichen werden. Dies ist in jedem Falle unzulässig. Die Drehung zwischen IMU und Kamera kann nur mit einer Drehmatrix formuliert werden.

Da auch bei sorgfältigster Montage der IMU an der Kamera immer eine kleine Schiefstellung zwischen den Achsen der IMU und der Kamera übrig bleibt, ist diese Schiefstellung durch Kalibrierung zu bestimmen. Für die Praxis wird empfohlen, die gegenseitige Schiefstellung der Achsen direkt in einem Schritt innerhalb der Bündeltriangulation zu bestimmen. Dazu sind dann nicht einmal Passpunkte erforderlich, weil die GPS Daten den Bildverband bei sinnvoller Anordnung voll ausreichend stützen.

Die IMU liefert pro Foto die Orientierung der IMU – nicht des Fotos. Gegeben sei für ein Foto die Drehmatrix der IMU  $\mathbf{R}_G^I$ , die das Objektsystem in den IMU-Raum dreht. Aus jedem Punkt  $\mathbf{x}$  im Objektraum wird nach (10)  $\mathbf{a}$  im IMU-Raum. Die Drehung des Objektraumes ins Foto wird mit (11) beschrieben.

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_G^I \mathbf{a} \quad (10)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_G^F \mathbf{x}' \quad (11)$$

Die Weiterdrehung des Bildraumes ins System der IMU erfolgt mit (12). Durch Einsetzen von (12) in (11) und gleichsetzen mit (10) erhalten wir die Beziehung (13) zwischen Foto und IMU. Die Matrix  $\mathbf{R}_F^I$  ist die kalibrierte Weiterdrehung des Bildes ins System der IMU.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_F^I \mathbf{a} \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_G^I = \mathbf{R}_G^F \mathbf{R}_F^I \quad (13)$$

Die grundlegende Beziehung (13) ist die Basis für die Kalibrierung der IMU. Gleichgültig ob die Elemente der Matrix  $\mathbf{R}_F^I$  an einem Testblock bestimmt werden, oder ob eine Bündelblockausgleichung durch IMU-Werte stabilisiert werden soll, es wird für alle Fälle empfohlen, diese Matrixelemente simultan in der Bündelblockausgleichung zu ermitteln. Dazu ist eine Linearisierung nach Taylor vorzunehmen, die dann auf ein recht umfangreiches Gleichungssystem führt.  $\Phi$ ,  $\Omega$ ,  $K$  sind die gemessenen Winkel der IMU,  $v\Phi$ ,  $v\Omega$ ,  $vK$  deren Verbesserungswinkel und  $d\phi$ ,  $d\omega$ ,  $dk$  die gesuchten Kalibrierwinkel.

$$\begin{aligned} \Phi + v\Phi &= f_1(\phi, \omega, \kappa, d\phi, d\omega, dk) \\ \Omega + v\Omega &= f_2(\phi, \omega, \kappa, d\phi, d\omega, dk) \\ K + vK &= f_3(\phi, \omega, \kappa, d\phi, d\omega, dk) \end{aligned} \quad (14)$$

Im Bündelblockprogramm BINGO werden diese Kalibrierwinkel automatisch als Unbekannte berücksichtigt, sobald IMU-Winkel als Beobachtungen gegeben sind.

## 5 Wahl des Koordinatensystems

Eine IMU liefert die Winkel für jeden Punkt sofort direkt im Schwerfeld der Erde. Jeder Messwert hat also seinen Bezug in einem lokalen Tangentialsystem, dessen Ursprung im jeweiligen Messpunkt liegt. Die Nordrichtung ist bis auf sehr kleine Restfehler Geographisch Nord. Liegen die Passpunktkoordinaten im UTM oder Gauß-Krüger-System vor, so sind die IMU-Winkel lediglich um die Meridiankonvergenz zu korrigieren um sie ebenfalls streng in ein solches System zu übertragen.

Die Messwerte der IMU liefern keinerlei Anlass, eine Übertragung aller Koordinaten und Winkel in ein lokales Tangentialsystem vorzunehmen. Diese von anderen Autoren teilweise vorgeschlagene Vorgehensweise ist bezüglich der IMU-Winkel unbegründet. Allenfalls könnten die verzerrten Koordinaten von Passpunkten und DGPS-Projektionszentren eine solche Vorgehensweise begründen. Wer also bisher trotz Projektionsverzerrungen von UTM oder Gauß-Krüger seine Bündelblöcke in diesen Systemen ausgeglichen hat, muss wegen der IMU-Winkel auf keinen Fall eine Änderung der Vorgehensweise vornehmen.

Bisherige Erfahrungen rechtfertigten noch in keinem Falle einer normalen Bündelausgleichung einen Übergang in ein lokales Tangentialsystem.

### Literatur

- [1] JORDAN, EGGERT, KNEISSL Handbuch der Vermessungskunde. Photogrammetrie, Band III a/1, Stuttgart 1972.
- [2] WROBEL, B. und E. KRUCK, Passpunktbestimmung an Fassaden durch Bündelblockausgleichung mit Bildern von Stereokammern. CIPA-Symposium, Sibenik, Oktober 1978
- [3] ZURMÜHL, R. Matrizen, Berlin 1964

### Anschrift des Autors

Dr.-Ing. ERWIN J. KRUCK  
Geoinformatics & Photogrammetric  
Engineering  
Tännichweg 3, 73430 Aalen,  
Germany  
Tel.: +49-7361-931434  
Fax: +49-7361-931435  
email: info@gip-aalen.de